Modeller af befolkningsudvikling

Teori og opgaver med udgangspunkt i udvalgte områder i Køge Bugt regionen

Af Mikkel Rønne, Brøndby Gymnasium

Forord. Data er udtrukket fra Danmarks Statistiks interaktive kort "eXplorer".

Hvor mange bor der i Danmark om 20 år? Et interessant spørgsmål, som er umuligt at svare præcist på. Af mange årsager er vi interesseret i at vide, hvor stor vores befolkning er i fremtiden. Vil aldersfordelingen blive ved med at blive det samme, kunne også være et andet godt spørgsmål. Rundt omkring i landets kommuner sidder der folk, som prøver at vurdere, hvor mange folkeskoler og børnehaver, der er behov for i fremtiden. En skole for meget kan have alvorlige økonomiske konsekvenser.

I dette arbejdshæfte fokuserer vi på befolkningsudviklingen i udvalgte kommuner i Køge Bugt regionen. Vi vil undersøge om det er muligt med simple matematiske modeller at beskrive udviklingen. Vi vil kigge på om modellerne har potentiale til at forudsige den kommende befolkningsudvikling.

Den eksponentielle udvikling.

$$N(t) = N_0 \cdot (1 + r)^t$$

Befolkningsudvikling for et isoleret område afhænger af, hvor mange der fødes i forhold til hvor mange der dør. Dette tal beskrives ved et tal, r, som kaldes vækstraten, 1+r kaldes fremskrivningsfaktoren. En befolkning på 1000 indbyggere til at starte med, som øger deres antal med to procent om året, vil kunne beskrives med følgende matematiske relation:

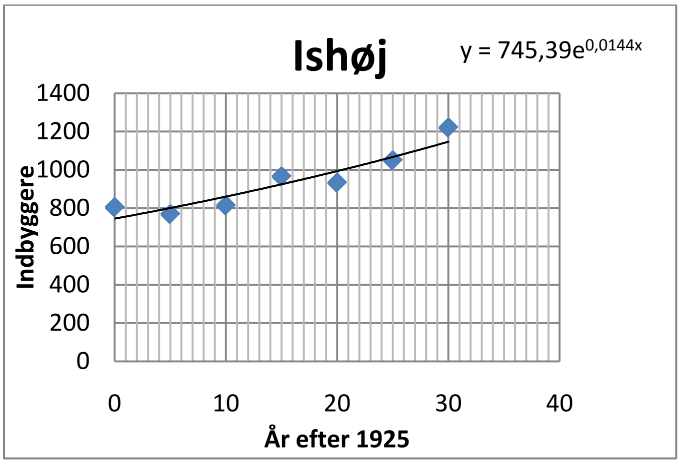
$$N(t) = 1000 \cdot (1{,}02)^t$$

En befolkning med 2000 indbyggere, hvor antallet falder med 3 procent om året beskrives ved følgende:

$$N(t) = 2000 \cdot (0{,}97)^t$$

Ishøj 1920-1945.

Årstal	År nr. efter 1925	Indbyggere
1925	0	804
1930	5	768
1935	10	813
1940	15	965
1945	20	932
1950	25	1049
1955	30	1220



Kigger vi på udviklingen så kunne den beskrives med en lineær udvikling. Men en eksponentiel udvikling beskriver også befolkningsantallet relativt godt. Regnearket giver en tendenslinje, som hedder

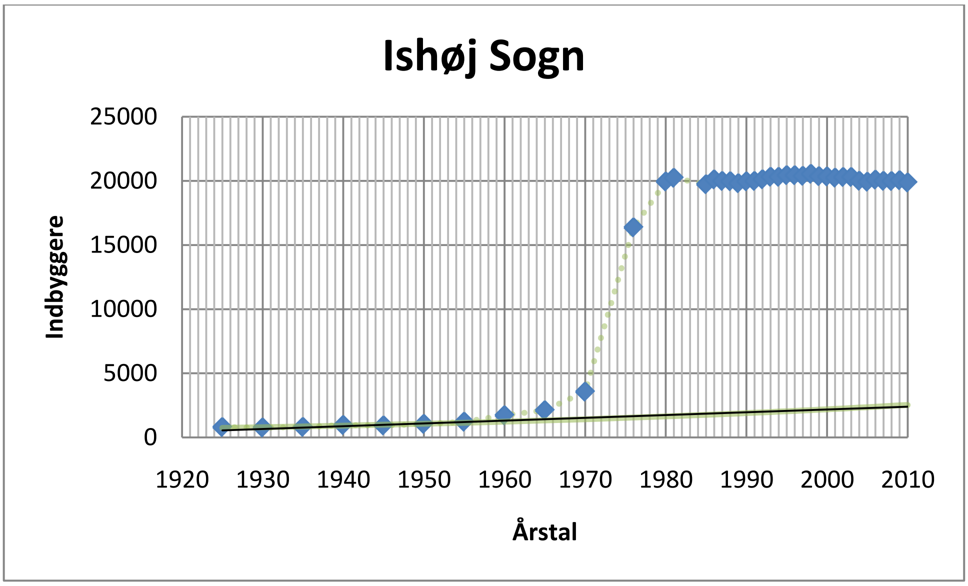
$$N(t) = 745 \cdot e^{0{,}0144 \cdot t} = 745 \cdot 1{,}0145^t$$

Her er $e^{0{,}0144}$=1,0145, e er Eulers tal. Modellen giver et startantal på 745 og en 1,45 % stigning om året. Hvis Ishøj Sogn havde været et isoleret område med samme fødsels- og dødsrate, ville befolkningen i 2012 være:

$$N(2012 - 1925) = N(87) = 745 \cdot 1{,}0145^{87} \approx 2608$$

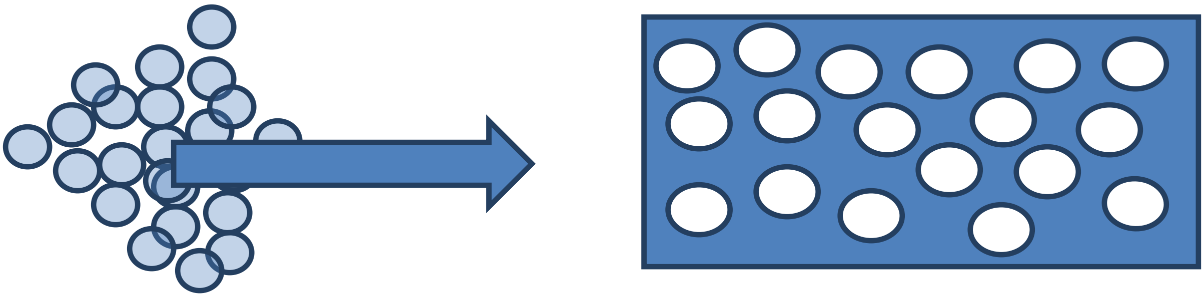
I stedet for ser vi en befolkning på over 20.000 indbyggere. Hvad er der så gået galt? I det ovenstående har vi slet ikke taget højde for til- og fraflytning.

Kigger vi på Ishøjs befolkning indtil nu ser den anderledes ud.



I 1970erne, med start i 1960erne, sker der en eksplosiv befolkningstilvækst. For at finde årsagen til dette må vi kigge tilbage i historien. Rent matematisk fortsætter vi vores søgning efter en ny model, der kan beskrive Ishøjs befolkningsudvikling.

Logistisk udvikling.



Den logistiske udvikling er en slags begrænset eksponentiel udvikling. I forbindelse med befolkningstilvækst så kan man forestille sig, at antallet af potentielle tilflyttere i område vokser eksponentielt, men da der kun er en begrænset mængde pladser, så falder sandsynligheden (af forskellige årsager) for at tilflytterne finder den rette bolig.

I matematikken kan dette mere præcist formuleres vha. en såkaldt differentialligning (A-niveau stof)

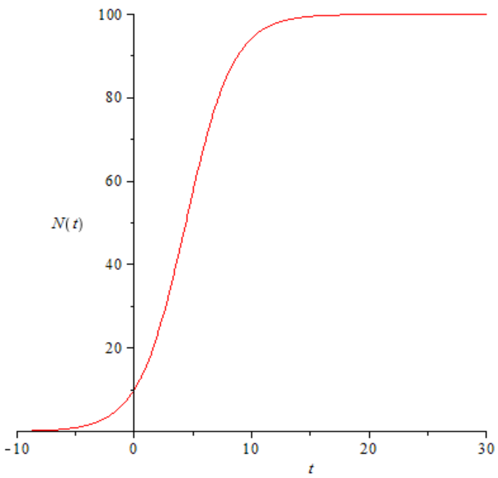
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Løsningen til denne ligning er en funktion på formen:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-r \cdot t} + 1}$$

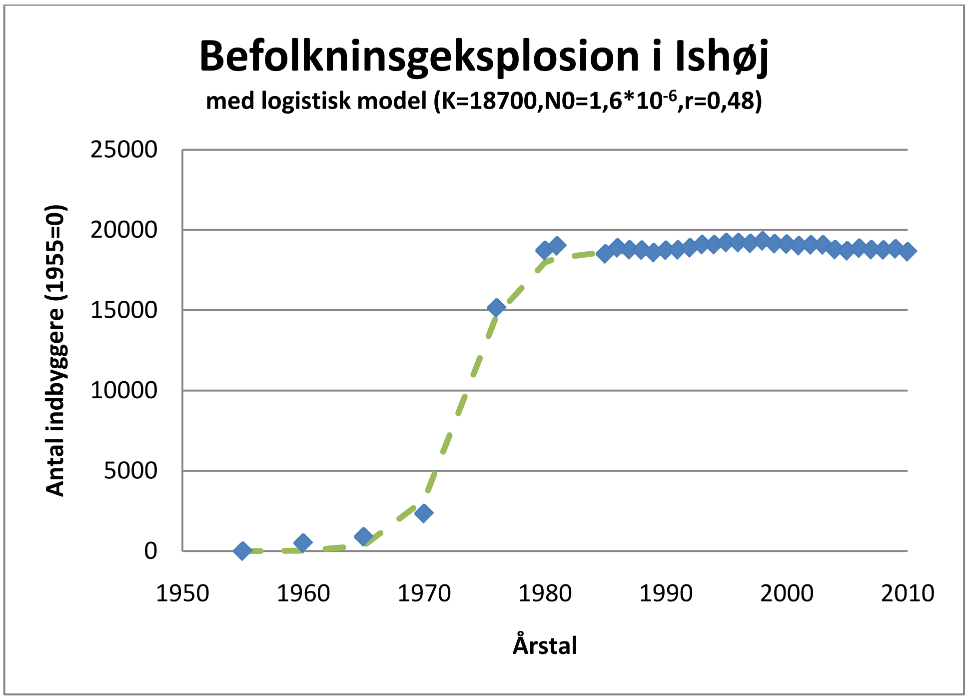
N(t) beskriver en logistisk udvikling

K kaldes bæreevnen, N_0 er skæring med y-akse og r kaldes den indre vækstrate. Alle er positive konstanter. Nedenunder ses en kurve for logistisk vækst med K=100, N_0=10 og r=0,5



Vi kan her se, at kurven kunne være en god kandidat til at beskrive Ishøjs befolkningsudvikling i en begrænset periode.

For at se om modellen passer, vælger vi at kigge på data fra 1955 – det årstal som er umiddelbart inden den voldsomme udvikling starter. I et regneark kan vi variere parametrene indtil modellen passer nogenlunde.



Årstal	Indbyggere (1955=0)
1955	0
1960	506
1965	895
1970	2342
1976	15150
1980	18727
1981	19013
1985	18514
1986	18891
1987	18771
1988	18750
1989	18594
1990	18740

Selvom det er ret tilfredsstillende at opdage, at befolkningstilvæksten kan beskrives nogenlunde eksakt matematisk, så er det på ingen måde sikkert, at logistisk vækst er en slags naturlov for byudvikling. Vi kan altså nøjes med at betragte det her som en slags første skridt mod udvikling af en model.

FORSTADEN.NU

Opgaver

Opgave 1 – Avedøre Sogn

Nedenstående tabel viser indbyggere antallet fra 1945-1976 i Avedøre Sogn.

Årstal	År efter 1945	Indbyggere
1945	0	802
1950	5	1294
1955	10	1876
1960	15	3500
1965	20	5141
1970	25	6813
1976	31	10912

Redegør for, at indbyggerantallet med god tilnærmelse ligner en eksponentiel udvikling med en gennemsnitlig stigning på 8,9 procent om året.

Opgave 2 – Kildebrønde Sogn
Befolkningsudviklingen i Kildebrønde Sogn.

Årstal	År efter 1925	Indbyggere
1925	0	939
1930	5	955
1935	10	1083
1940	15	1183
1945	20	1274
1950	25	1427

Redegør for, at indbyggertallet med god tilnærmelse kan beskrives ved en eksponentiel udvikling med en gennemsnitlig stigning på 1,75 procent om året i perioden 1925 til 1950.

Opskriv det matematiske udtryk for den eksponentielle udvikling. Hvor stor vil befolkningen have været i 1990, hvis udviklingen havde fortsat?

Det rigtige tal er omkring 16000 indbyggere i 1990.

Årstal	År efter 1955	Indbyggere	Indbyggere (1955=0)
1955	0	1682	0
1960	5	1894	212
1965	10	3148	1466
1970	15	7095	5413
1976	21	13417	11735

1980	25	14992	13310

Find Excel dokumentet "Kildebrønde-1.xlsx"

Her er ovenstående data indlagt med en logistisk model.

Undersøg om du kan justere parametrene (K, N_0 og r) for at få modellen til at passe.

Opgave 3

Funktionsanalyse – logistisk vækst.
Opgaven kan delvist løses med CAS-værktøj.

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-r \cdot t} + 1}$$

a) Vis at $N(0) = N_0$

b) Forklar hvad der sker med N(t), når t bliver meget stor?
Matematisk formulering af spørgsmålet: Find $\lim_{t \to \infty} \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-r \cdot t} + 1}$

c) Hvornår er befolkningstilvæksten størst? (Find maksimum af N'(t)). Vis at befolkningstilvæksten er størst ved $t = \frac{ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)}{r}$ med funktionsværdien ½K.

d) Vis, at den største befolkningshastighed er 1/4rK.